Les billards mathématiques

Introduction aux systèmes dynamiques

Sergi Burniol Clotet (Udelar)

25 septembre 2024
Lycée Français Jules Supervielle (Montevideo)

Système dynamique

Un système dynamique est la donnée d'...

- un espaces de phases, qui est l'ensemble des possibles états du système,
- une loi d'évolution du système, qui sont les règles qui déterminent comment les états changent.

Le but est de comprendre différents aspects comme

- états d'équilibre,
- trajectoires,
- comportement asymptotique,
- propriétés statistiques,
- stabilité.

Example

Un système dynamique classique: les planètes.

Les billards

Definition

Un billard est le déplacement libre d'une particule (bille) sur une surface (table de billard) qui peut avoir un bord et des obstacles.

Les billards

Definition

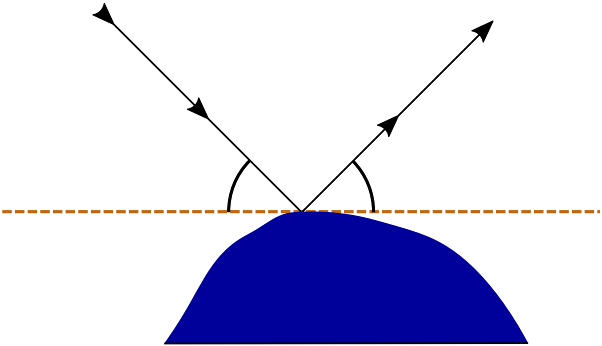
Un billard est le déplacement libre d'une particule (bille) sur une surface (table de billard) qui peut avoir un bord et des obstacles.

- L'angle de réflexion est identique à l'angle d'incidence.

Definition

Un billard est le déplacement libre d'une particule (bille) sur une surface (table de billard) qui peut avoir un bord et des obstacles.

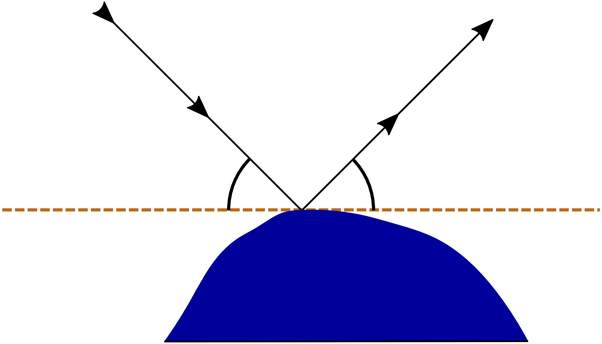
- L'angle de réflexion est identique à l'angle d'incidence.



Definition

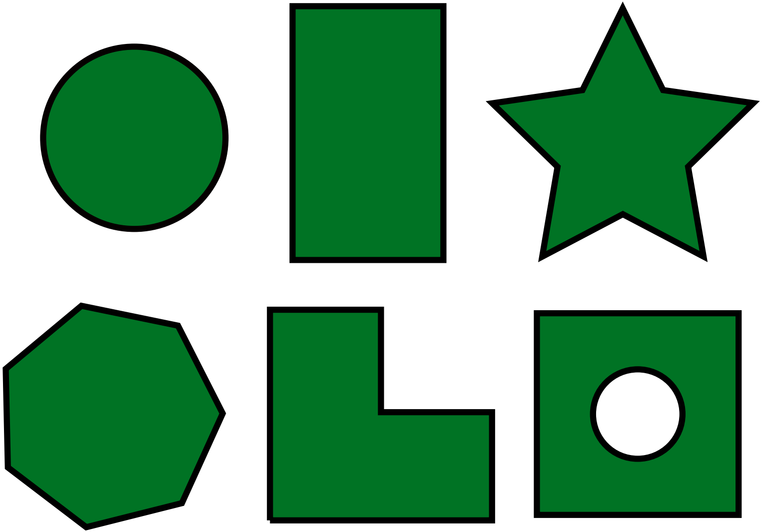
Un billard est le déplacement libre d'une particule (bille) sur une surface (table de billard) qui peut avoir un bord et des obstacles.

- L'angle de réflexion est identique à l'angle d'incidence.



- Le frottement n'est pas considéré. La bille ne perd pas de vitesse.

Tables avec des formes très variées



Système continu ou discret

Deux façons de décrire un billard sur une table T:

Système continu ou discret

Deux façons de décrire un billard sur une table T:

- (continu) La bille est à n'importe quel endroit de la table. Un état est la donnée d'un point x de la table T et l'angle $\alpha \in [0, 2\pi]$ de la direction de la bille. Le mouvement est à vitesse constante égale à 1.

Système continu ou discret

Deux façons de décrire un billard sur une table T:

- (continu) La bille est à n'importe quel endroit de la table. Un état est la donnée d'un point x de la table T et l'angle $\alpha \in [0, 2\pi]$ de la direction de la bille. Le mouvement est à vitesse constante égale à 1.
- (discret) On considère juste les rebonds successifs sur les bords. Un état est un point du bord de T et l'angle dans $[0, \pi]$ de la direction de la bille. L'espace de phases est l'ensemble des bords . La loi d'évolution associe à un état l'état du rebond successif.

Table rectangulaire

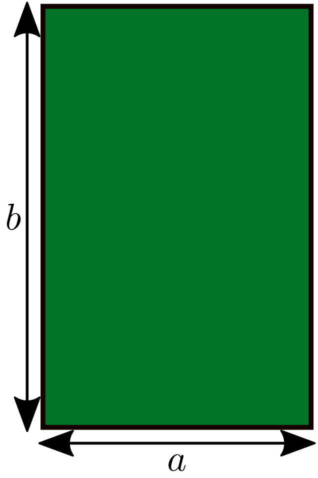
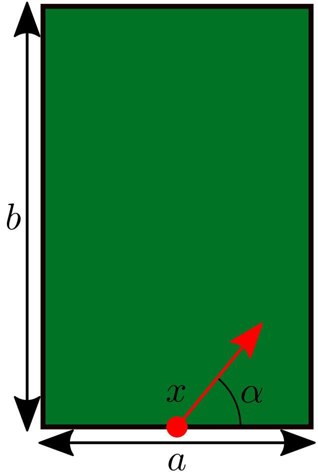
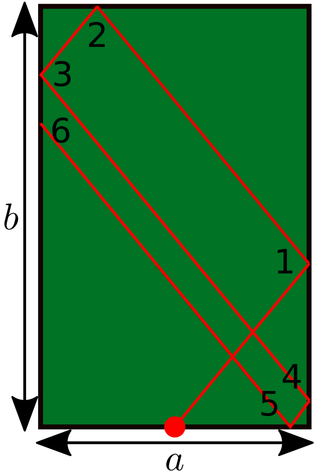


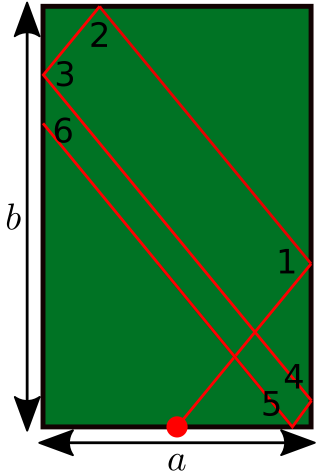
Table rectangulaire



- On lance une bille d'un point x du côté inférieur avec un angle α.

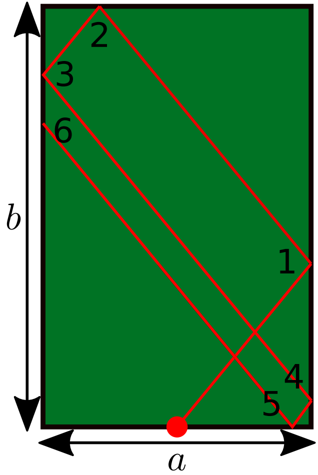


- On lance une bille d'un point x du côté inférieur avec un angle α.

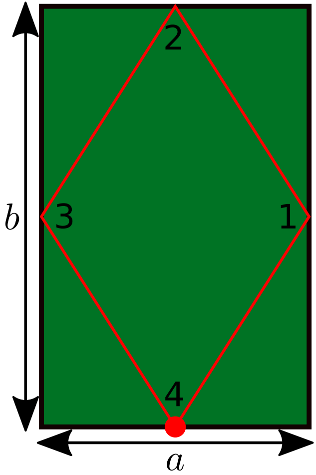


- On lance une bille d'un point x du côté inférieur avec un angle α.
- Quels sont les possibles angles de cette trajectoire ?

Table rectangulaire

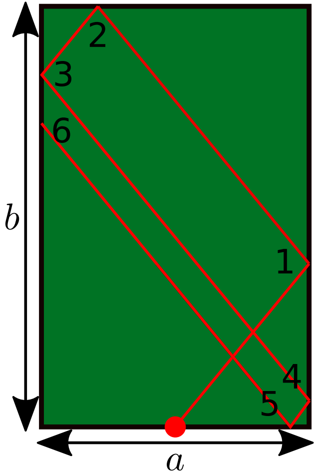


- On lance une bille d'un point x du côté inférieur avec un angle α.
- Quels sont les possibles angles de cette trajectoire ?
- Quelles types de trajectoires attendez-vous ?



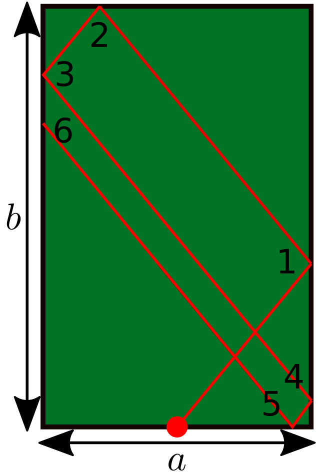
- On lance une bille d'un point x du côté inférieur avec un angle α.
- Quels sont les possibles angles de cette trajectoire ?
- Quelles types de trajectoires attendez-vous ?
    - Trajectoires périodiques (qui reviennent exactement sur le point de départ) ?

Table rectangulaire



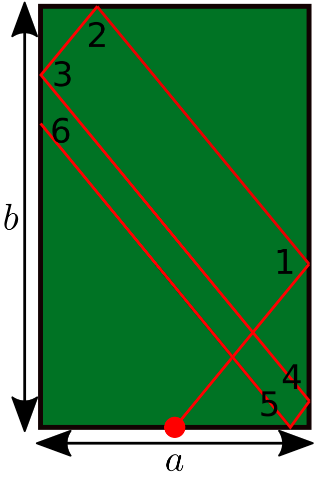
- On lance une bille d'un point x du côté inférieur avec un angle α.
- Quels sont les possibles angles de cette trajectoire ?
- Quelles types de trajectoires attendez-vous ?
  - Trajectoires périodiques (qui reviennent exactement sur le point de départ) ?
  - Quel comportement pour les trajectoires non périodiques ?

Table rectangulaire



- On lance une bille d'un point x du côté inférieur avec un angle α.
- Quels sont les possibles angles de cette trajectoire ?
- Quelles types de trajectoires attendez-vous ?
  - Trajectoires périodiques (qui reviennent exactement sur le point de départ) ?
  - Quel comportement pour les trajectoires non périodiques ?
- De quels paramètres cela dépend ?

Table rectangulaire



- On lance une bille d'un point x du côté inférieur avec un angle α.
- Quels sont les possibles angles de cette trajectoire ?
- Quelles types de trajectoires attendez-vous ?
  - Trajectoires périodiques (qui reviennent exactement sur le point de départ) ?
  - Quel comportement pour les trajectoires non périodiques ?
- De quels paramètres cela dépend ?
- *Réponses: Si le rapport entre* $\tan(\alpha)$ *et* b/a *est rationnel, la trajectoire est périodique. Sinon, elle est dense. Cela ne dépend pas du point de départ* x.

Table circulaire

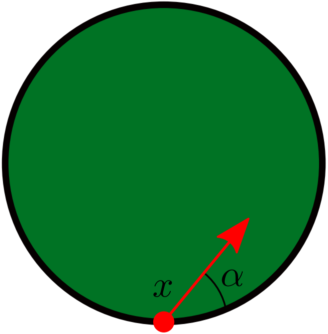


Table circulaire

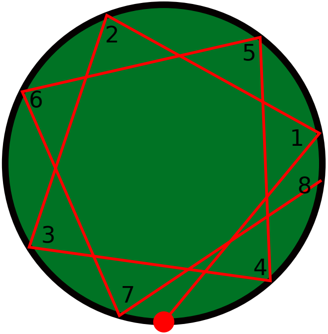
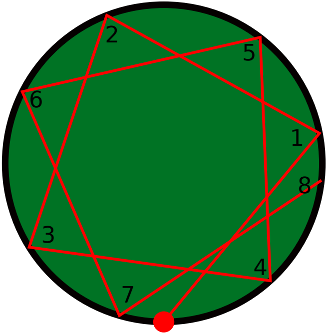
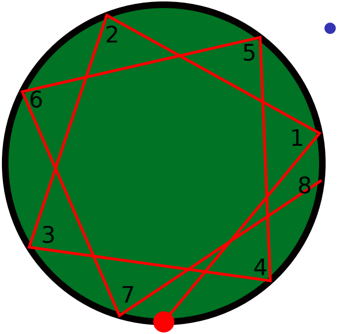


Table circulaire



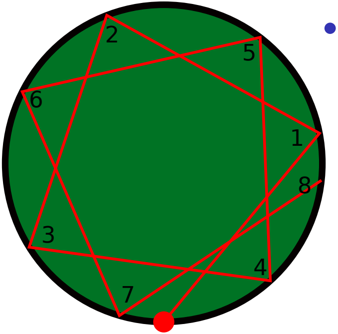
- Qu'est-ce qu'elles ont en commun, les segment d'une même trajectoire ?

Table circulaire



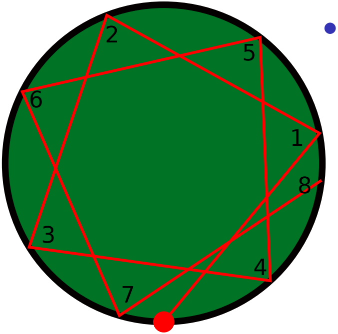
- Qu'est-ce qu'elles ont en commun, les segment d'une même trajectoire ?
- Quelles types de trajectoires attendez-vous ?

Table circulaire



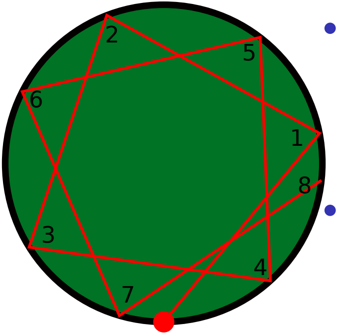
- Qu'est-ce qu'elles ont en commun, les segment d'une même trajectoire ?
- Quelles types de trajectoires attendez-vous ?
  - Trajectoires périodiques (qui reviennent exactement sur le point de départ) ?

Table circulaire



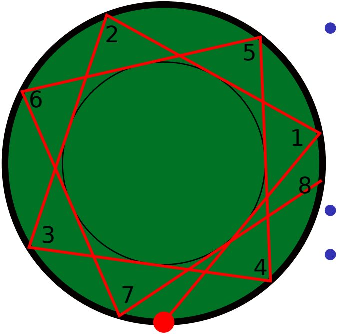
- Qu'est-ce qu'elles ont en commun, les segment d'une même trajectoire ?
- Quelles types de trajectoires attendez-vous ?
  - Trajectoires périodiques (qui reviennent exactement sur le point de départ) ?
  - Quel comportement pour les trajectoires non périodiques ?

Table circulaire



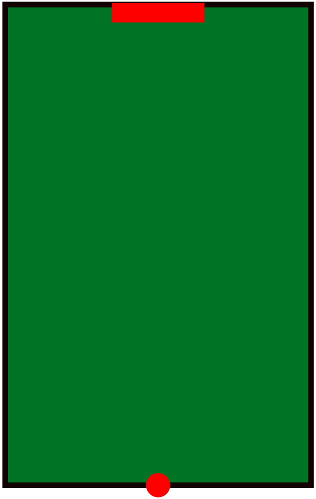
- Qu'est-ce qu'elles ont en commun, les segment d'une même trajectoire ?
- Quelles types de trajectoires attendez-vous ?
  - Trajectoires périodiques (qui reviennent exactement sur le point de départ) ?
  - Quel comportement pour les trajectoires non périodiques ?
- De quels paramètres cela dépend ?

Table circulaire

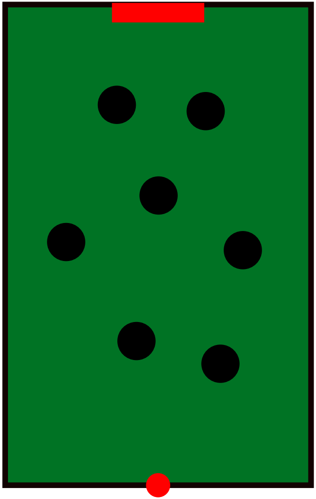


- Qu'est-ce qu'elles ont en commun, les segment d'une même trajectoire ?
- Quelles types de trajectoires attendez-vous ?
  - Trajectoires périodiques (qui reviennent exactement sur le point de départ) ?
  - Quel comportement pour les trajectoires non périodiques ?
- De quels paramètres cela dépend ?
- *Réponses: Les trajectoires sont tangentes à un même cercle. Si l'angle α est rationnel, la trajectoire est périodique. Sinon, elle rempli l'extérieur du cercle. Cela ne dépend pas du point de départ x.*

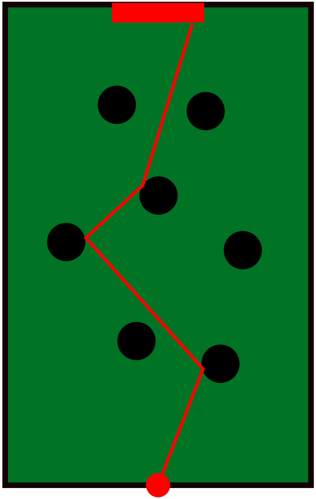
Un billard chaotique



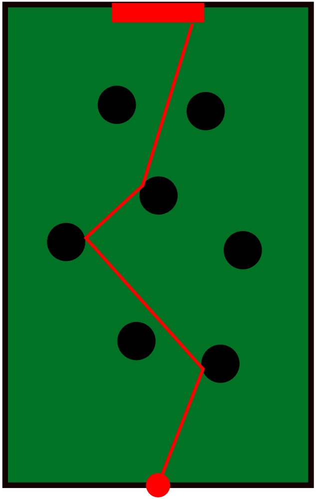
Un billard chaotique



Un billard chaotique

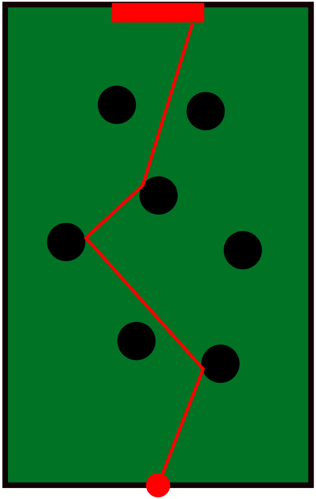


Un billard chaotique



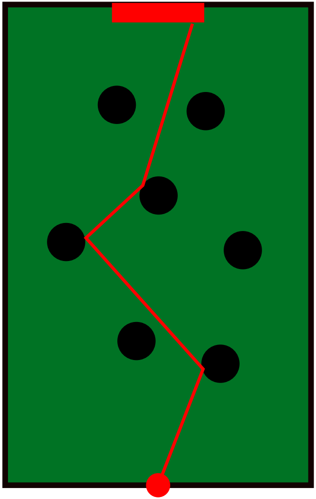
- Simulation avec GeoGebra.

Un billard chaotique



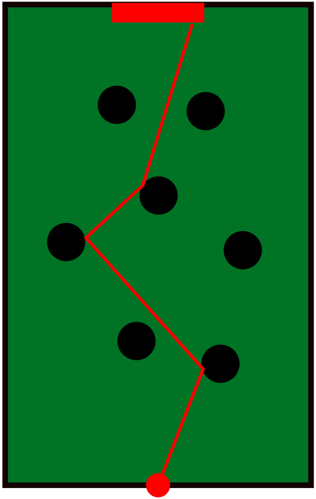
- Simulation avec GeoGebra.
- Imprévisible.

Un billard chaotique



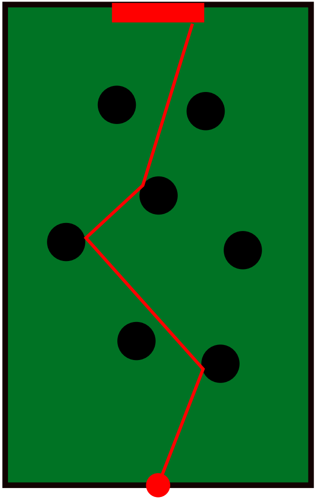
- Simulation avec GeoGebra.
- Imprévisible.
- Sensible aux conditions initiales.

Un billard chaotique



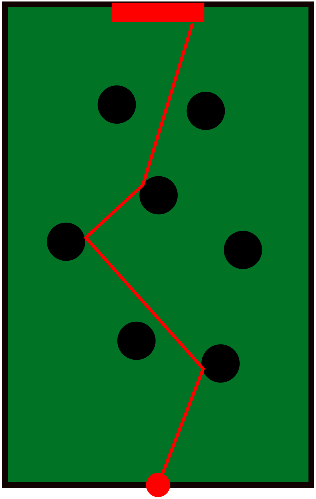
- Simulation avec GeoGebra.
- Imprévisible.
- Sensible aux conditions initiales.
- Les obstacles ronds dispersent les trajectoires.

Un billard chaotique



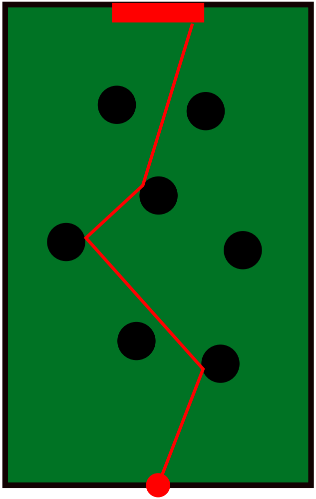
- Simulation avec GeoGebra.
- Imprévisible.
- Sensible aux conditions initiales.
- Les obstacles ronds dispersent les trajectoires.
- On peut lancer la bille et observer la trajectoire. C'est pratiquement aléatoire. On s'intéresse à comprendre les chances que la bille touche le but.

Un billard chaotique



- Simulation avec GeoGebra.
- Imprévisible.
- Sensible aux conditions initiales.
- Les obstacles ronds dispersent les trajectoires.
- On peut lancer la bille et observer la trajectoire. C'est pratiquement aléatoire. On s'intéresse à comprendre les chances que la bille touche le but.
- Décrire ce comportement à l'aide de la théorie de probabilités.

Un billard chaotique



- Simulation avec GeoGebra.
- Imprévisible.
- Sensible aux conditions initiales.
- Les obstacles ronds dispersent les trajectoires.
- On peut lancer la bille et observer la trajectoire. C'est pratiquement aléatoire. On s'intéresse à comprendre les chances que la bille touche le but.
- Décrire ce comportement à l'aide de la théorie de probabilités.
- Modèle pour le gaz de Lorentz.